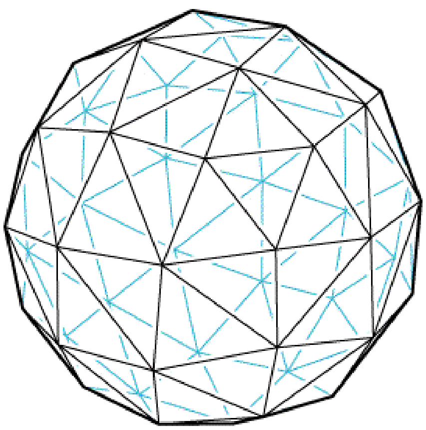
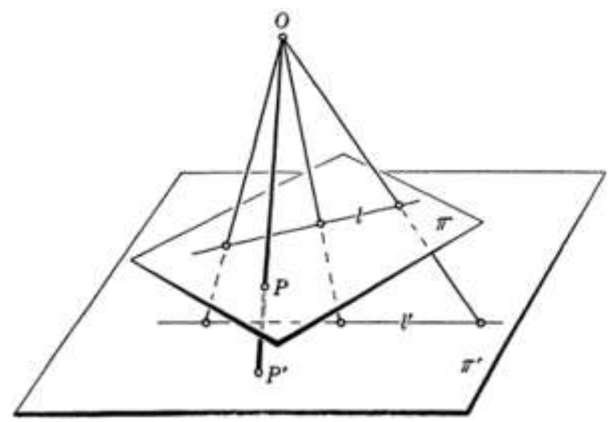
เอกสารประกอบการเรียนรู้

เพื่อทบทวนบทเรียนภาคฤดูร้อน





วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจงแอกสารประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

หน่วยที่ 1 ทบทวนความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

จุดประสงค์ของบทเรียนออนไลน์

เพื่อทบทวนควความรู้พื้นฐานเรื่อง...ความสัมพันธ์, โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์,ตัวผกผันของความสัมพันธ์, ฟังก์ชัน, ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด, การดำเนินการของฟังก์ชัน, ฟังก์ชันประกอบและเทคนิคการเขียนกราฟ ก่อนเชื่อมโยงความรู้เรื่องฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนเพิ่มมากขึ้น

กิจกกรม

1. ศึกษาPowerPoint เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (เนื้อหา ม.4)
2. ทำใบงานที่ 1 – ใบงานที่ 5 (ให้นักเรียนDownload ไฟล์แล้วเขียนตอบด้วยตนเอง ไม่ควรคัดลอกจากเพื่อน นอกจากดู PowerPoint เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันของมิสแล้ว นักเรียนสามารถศึกษาจากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 , สมุดจดงานคณิตศาสตร์ หรือเอกสารประกอบการสอนที่คุณครูชั้น ม .4 จัดทำให้ประกอบการเรียน นอกจากนี้ยังสามารถสืบค้นข้อมูลเพิ่มจากอินเตอร์เน็ต เลือกดูคลิปวีดีโอต่างๆทำความเข้าใจก่อนทำทีละใบงาน ถึงแม้จะเป็นเรื่องที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว แต่นักเรียนควรใช้เวลาในการทำใบงานหน่วยนี้ประมาณ 1-2 สัปดาห์ ตามแต่ศักยภาพของแต่ละบุคคล)
3. หน่วยที่ 1 จะไม่มีการสอนเนื้อหาในชั้นเรียนเนื่องจากเป็นเป็นบทเรียนทบทวน ในช่วงเปิดเทอม ถึงแม้จะเป็นบทเรียนออนไลน์แต่สำหับวิชาคณิตศาสตร์ของมิสนักเรียนจะต้องส่งใบงานที่ 1-ใบงานที่5ทุกคน มิสจะเก็บเป็นคะแนนงานจริง ขอให้แจ้งพื่อนในห้องเรียนด้วยเผื่อใครคิดว่าไม่สำคัญและไม่ทำ
4. เมื่อเปิดเทอมในคาบแรกมิสจะมีแบบฝึกหัดให้ทำเพิ่มอีกเล็กน้อย(ตามศักภาพของผู้เรียน) หลังจากนั้นจะสอบเก็บคะแนนเรื่องนี้เลย ดังนั้นเมื่อทำใบงานเสร็จในช่วงปิดเทอม พอใกล้เปิดเทอมขอให้นักเรียนทบทวนใหม่อีกครั้งเพื่อเตรียมตัวสอบ)

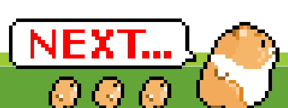
5. ปกติในการทบทวนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันมิสจะใช้เวลาสอน 1-2 สัปดาห์ ดังนั้นเมื่อนักเรียนได้ใช้เวลาในการทบทวนด้วยตนเองในช่วงปิดเทอมแล้ว มิสจะเพิ่มการฝึกทำข้อสอบ O_NET และ ข้อสอบ PAT1 ให้นะคะ

สิ่งที่แนบมา

1. คำชี้แจงหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
2. PowerPoint เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
3. ใบงานที่ 1 – ใบงานที่ 5

ครูผู้สอน   มิสชลธิชา บุญเลี้ยง

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



ผังมโนทัศน์

ฟังก์ชัน

ตัวผกผัน
ของความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์

- ผลคูณคาร์ทีเซียล
- ความสัมพันธ์
- โดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์

ฟังก์ชัน

- ความหมายของฟังก์ชัน
- ชนิดของฟังก์ชัน
- ฟังก์ชันประกอบ
- เทคนิคการเขียนกราฟ

ผลการเรียนรู้

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชัน และสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้

- นำความรู้เรื่องฟังก์ชันไปใช้แก้ปัญหาได้

บทที่ 2

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2.1 ความสัมพันธ์

สิ่งหนึ่งที่เป็นพื้นฐานสำคัญในเรื่องของความสัมพันธ์คือคู่อันดับ การเป็นคู่อันดับก็คือจะต้องเป็นคู่และมีอันดับ ในคณิตศาสตร์จะเขียนคู่อันดับในรูป (a , b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง ซึ่ง $(a , b) \neq (b , a)$ แต่ $(a , b) = (b , a)$ เมื่อ $a = b$ เท่านั้น หรือ $(a , b) = (c , d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

2.1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

<u>บทนิยาม</u> ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a , b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

ดังนั้น $A \times B = \{(a , b)/a \in A$ และ $b \in B\}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{0 , 1\}$, $B = \{ 2 , 4 , 7\}$

จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีทำ

$A \times B = \{(0 , 2), (0 , 4), (0 , 7), (1 , 2), (1 , 4), (1 , 7)\}$

$B \times A = \{(2 , 0), (2 , 1), (4 , 0), (4 , 1), (7 , 0), (7 , 1)\}$

จากตัวอย่างสังเกตเห็นว่า

1. $A \times B \neq B \times A$

2. $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{0\}$, $B = \{-3 , 5\}$ จงหา

$A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$

วิธีทำ

$A \times B = \{(0 , -3), (0 , 5)\}$ และ $n(A \times B) = 1 \times 2 = 2$

$B \times A = \{(-3 , 0), (5 , 0)\}$ และ $n(B \times A) = 2 \times 1 = 2$

$A \times A = \{(0 , 0)\}$ และ $n(A \times A) = 1 \times 1 = 1$

$B \times B = \{(-3 , -3), (-3 , 5), (5 , -3), (5 , 5)\}$

และ $n(B \times B) = 2 \times 2 = 4$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{3\}$, $B = \{\varnothing\}$

จะได้

$A \times B = \{(3, \varnothing)\}$ $\quad$ $B \times A = \{(\varnothing, 3)\}$

$A \times A = \{(3, 3)\}$ $\quad$ $B \times B = \{(\varnothing, \varnothing)\}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A = \varnothing$, $B = \{1, 4\}$

จะได้

$A \times B = \varnothing$ $\quad$ $B \times A = \varnothing$ $\quad$ $A \times A = \varnothing$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

2.1.2 ความสัมพันธ์ (Relation)

จากที่กล่าวมาแล้วว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a , b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B ถ้าแทนความสัมพันธ์ด้วย r จะกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต หรือ $r \subset A \times B$ และเรียก $r \subset A \times A$ ว่าความสัมพันธ์ใน A

__บทนิยาม__ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{3 , 4\}$, $B = \{6 , 8 , 9\}$

$A \times B = \{(3 , 6), (3 , 8), (3 , 9), (4 , 6), (4 , 8), (4 , 9)\}$

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ “**หารลงตัว**” จาก A ไป B

$r_1 = \{(3 , 6), (3 , 9), (4 , 8)\}$

ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ “**เป็นครึ่งหนึ่ง**” จาก A ไป B

$r_2 = \{(3 , 6), (4 , 8)\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{2, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ “**หารลงตัว**” จาก A ไป B

$r_1 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}$

ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ “**เป็นสองเท่า**” จาก A ไป A

$r_2 = \{(4, 2)\}$

ให้ r_3 เป็นความสัมพันธ์ “**เป็นครึ่งหนึ่ง**” จาก B ไป B

$r_3 = \{(2, 4), (4, 8)\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ให้ $r_1 = \{(x, y) \in A \times A / x + y = 6\}$

$r_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

ให้ $r_2 = \{(x, y) \in A \times A / x > 3$ และ $y = 5\}$

$r_2 = \{(4, 5), (5, 5)\}$

ให้ $r_3 = \{(x, y) \in A \times A / y = 2x^2\}$

$r_3 = \{(1, 2)\}$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ จะเขียนแทน $(x, y) \in r$ ด้วย $x\,r\,y$

2.1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

<u>**บทนิยาม**</u> ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมน (Domain) ของ r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r ซึ่ง $D_r = \{x \,/\, (x , y) \in r\}$

เรนจ์ (Range) ของ r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r ซึ่ง $R_r = \{y \,/\, (x , y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 1 $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

$D_r = \{1, 2, 3, 4\}$ $R_r = \{2, 3, 4, 5\}$

ตัวอย่างที่ 2 $r = \{(x, y) \in A \times A / x < y\}, A = \{1, 2, 3\}$

$D_r = \{1, 2\}$ $R_r = \{2, 3\}$

ตัวอย่างที่ 3 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$r = \{(x, y) \in A \times A / y = x^2\}$$

$$= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$

$D_r = \{-1, 0, 1\}$

$R_r = \{0, 1\}$

ตัวอย่างที่ 4 $r = \{(x , y) \in A \times A / x + y = 8\}$

เมื่อ $A = \{x/x \in N , x \leq 6 \}$ จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ

$$r = \{(2 , 6), (3 , 5), (4 , 4), (5 , 3), (6 , 2)\}$$

$$D_r = \{2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

$$R_r = \{2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

การหาโดเมน

1. เขียนเงื่อนไขที่ให้อยู่ในรูป y ในเทอมของ x
2. พิจารณาค่า x ที่ทำให้ y หาค่าไม่ได้
3. โดเมนคือเซตของค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้

การหาเรนจ์

1. เขียนเงื่อนไขที่ให้อยู่ในรูป x ในเทอมของ y
2. พิจารณาค่า y ที่ทำให้ x หาค่าไม่ได้
3. เรนจ์คือเซตของค่า y ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้

ตัวอย่างที่ 5 $r = \{(x , y) \in R \times R / y = x + 3\}$ จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ หา D_r

จากโจทย์ 1. $y = x + 3$

2. พิจารณาค่า x จะพบว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะหาค่า y ได้เสมอ

3. $D_r = \{x / x \in R\}$

หา R_r

จากโจทย์ 1. $y = x + 3$

2. $x = y - 3$

3. พิจารณาค่า y จะพบว่า y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะหาค่า x ได้เสมอ

4. $R_r = \{x / x \in R\}$

ตัวอย่างที่ 6 $r = \{(x, y) \in R \times R / y = x^2 + 1\}$ จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ หา D_r

จากโจทย์ 1. $y = x^2 + 1$

2. พิจารณาค่า x จะพบว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะหาค่า y ได้เสมอ

3. $D_r = \{x / x \in R\}$

หา R_r

จากโจทย์ 1. $y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

2. $x = \pm\sqrt{y-1}$

3. พิจารณาค่า y จาก $\pm\sqrt{y-1}$ ค่า $y - 1 \geq 0$ เสมอ

4. $R_r = \{y / y \geq 1\}$

ตัวอย่างที่ 7 $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{x}{x+2} \right\}$

จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ หา D_r

จากโจทย์ 1. $y = \dfrac{x}{x+2}$

---

2. พิจารณาค่า x จะพบว่า $x + 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -2$ เท่านั้น

จะหาค่า y ได้เสมอ ไม่ว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม

3. $D_r = \{x \,/\, x \neq -2\}$

หา R_r

จากโจทย์ 1. $y = \frac{x}{x+2}$

$$\Rightarrow xy + 2y = x \quad \Rightarrow xy - x = -2y$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -2y \quad \Rightarrow x = \frac{-2y}{y-1}$$

2. พิจารณาค่า y จะพบว่า $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$ เท่านั้น จะหาค่า x ได้เสมอ ไม่ว่า y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม

3. $R_r = \{y \,/\, y \neq 1\}$

ตัวอย่างที่ 8 $r = \{(x, y) / y = \sqrt{16 - x^2}\}$

จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ หา D_r จาก $y = \sqrt{16 - x^2}$

พิจารณาค่า x จะพบว่า $16 - x^2 \geq 0$ ดังนั้น $x \in [-4, 4]$

นั่นคือ $D_r = [-4, 4]$

หา R_r เนื่องจาก $y = \sqrt{16 - x^2} \geq 0$

y มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x^2 = 16$ ซึ่ง $y = 0$

y มีค่ามากที่สุด เมื่อ $x^2 = 0$ ซึ่ง $y = \sqrt{16} = 4$

นั่นคือ $R_r = [0, 4]$

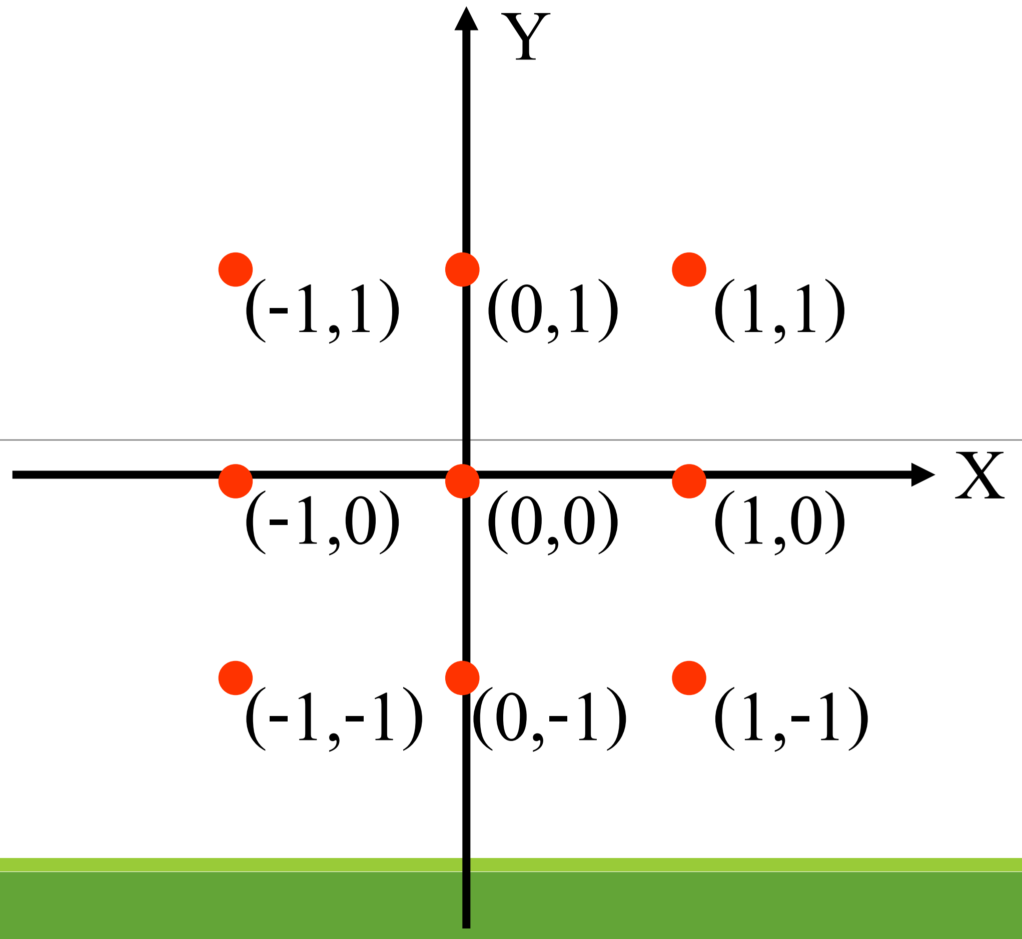
2.1.4 กราฟของความสัมพันธ์

บทนิยาม R เป็นเซตของจำนวนจริง และ $r \subset R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือเซตของจุดในระนาบ โดยที่จุดแต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r

ตัวอย่างที่ 1 $A = \{-1, 0, 1\}$ จงเขียนกราฟของ $A \times A$

วิธีทำ

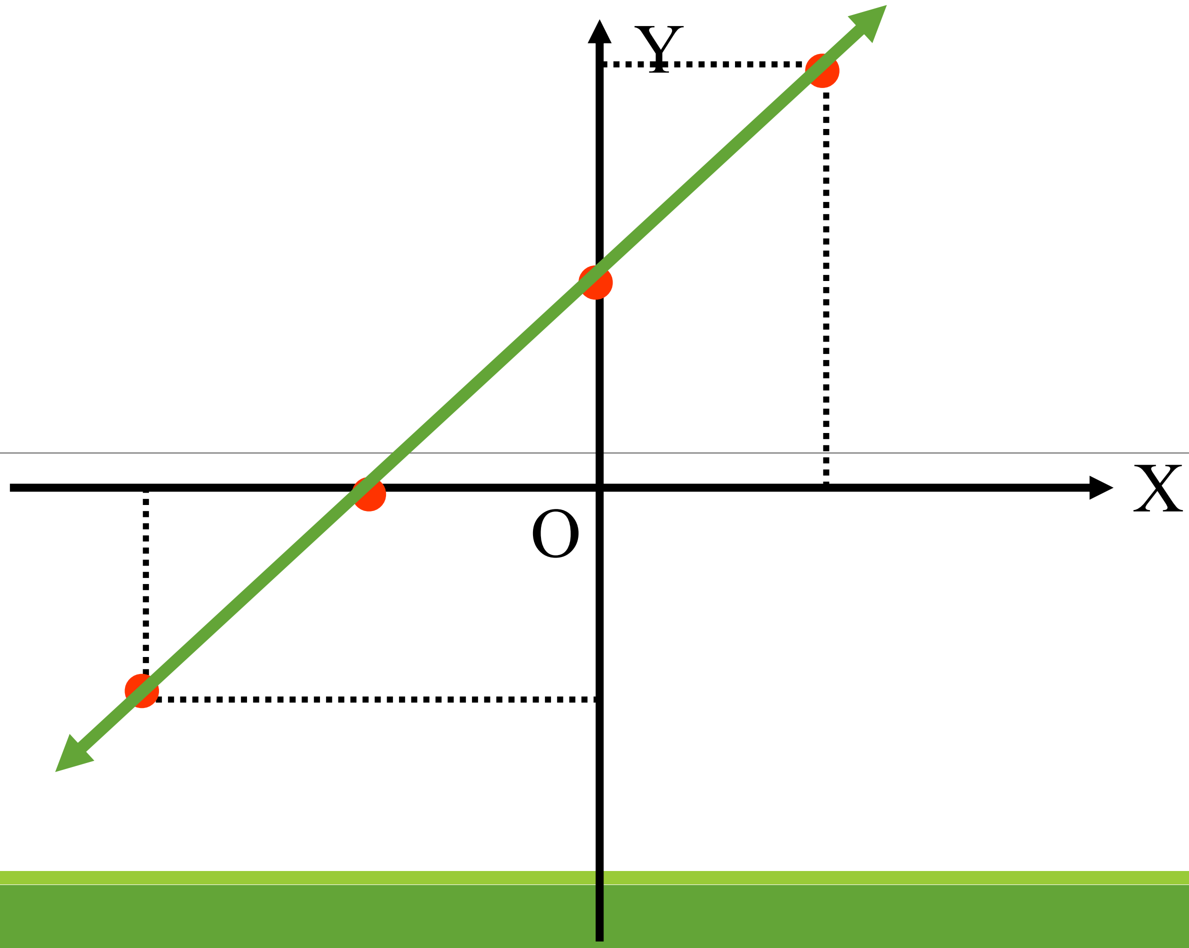
$A \times A = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$



ตัวอย่างที่ 2 $r = \{(x, y) / y = x + 1\}$ จงเขียนกราฟของ r

วิธีทำ

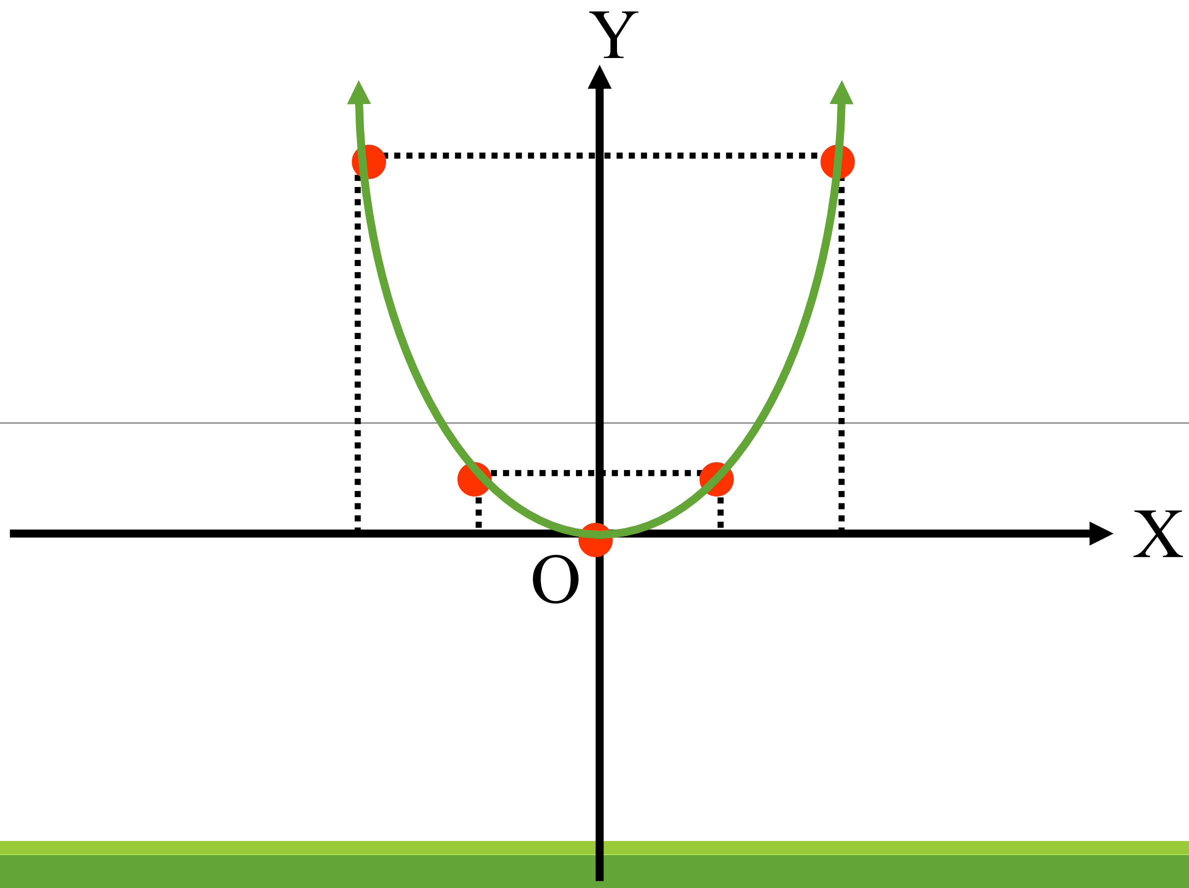
x	-2	-1	0	1
y = x + 1	-1	0	1	2



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) / y = x^2\}$

วิธีทำ

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



2.2 ตัวผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r **เขียนแทนตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ด้วย r^{-1}**

ดังนั้น ถ้า $r = \{(x , y) / (x , y) \in r\}$

แล้ว $r^{-1} = \{(y , x) / (x , y) \in r\}$

จะเห็นว่า $D_r = R_{r^{-1}}$ **และ** $R_r = D_{r^{-1}}$

ตัวอย่างที่ 1 $r = \{(1,4),(2,8),(-3,9)\}$

จงหา $r^{-1}, D_{r^{-1}}$ *และ* $R_{r^{-1}}$

วิธีทำ

$$r^{-1} = \{(4,1),(8,2),(9,-3)\}$$

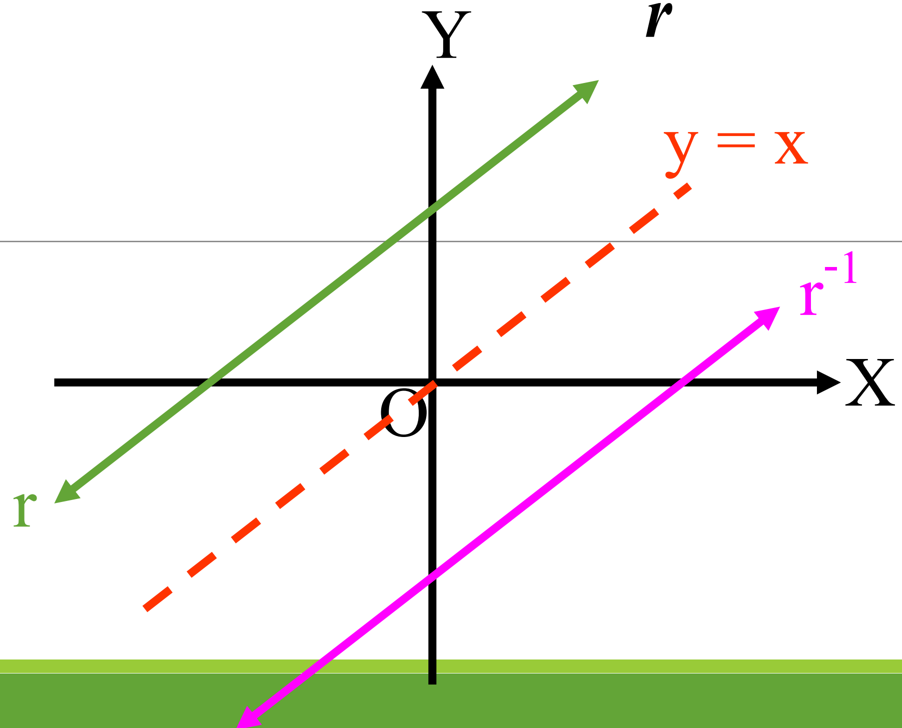
$$D_{r^{-1}} = \{4,8,9\} = R_r$$

$$R_{r^{-1}} = \{1,2,-3\} = D_r$$

ตัวอย่างที่ 2 $r=\{(x,y)/y=x+2\}$ จงหา $r^{-1}, D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน

วิธีทำ $r^{-1}=\{(x,y)/x=y+2\}$ หรือ $r^{-1}=\{(x,y)/y=x-2\}$

$D_{r^{-1}}=R_r=\{x/x\in R\}$ และ $R_{r^{-1}}=D_r=\{x/x\in R\}$



ตัวอย่างที่ 3 $r = \{(x,y) / y = \sqrt{x-3}\}$ จงหา $r^{-1}, D_{r^{-1}}$ *และ* $R_{r^{-1}}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน

วิธีทำ $r^{-1} = \{(x,y) / x = \sqrt{y-3}, x \geq 0\}$

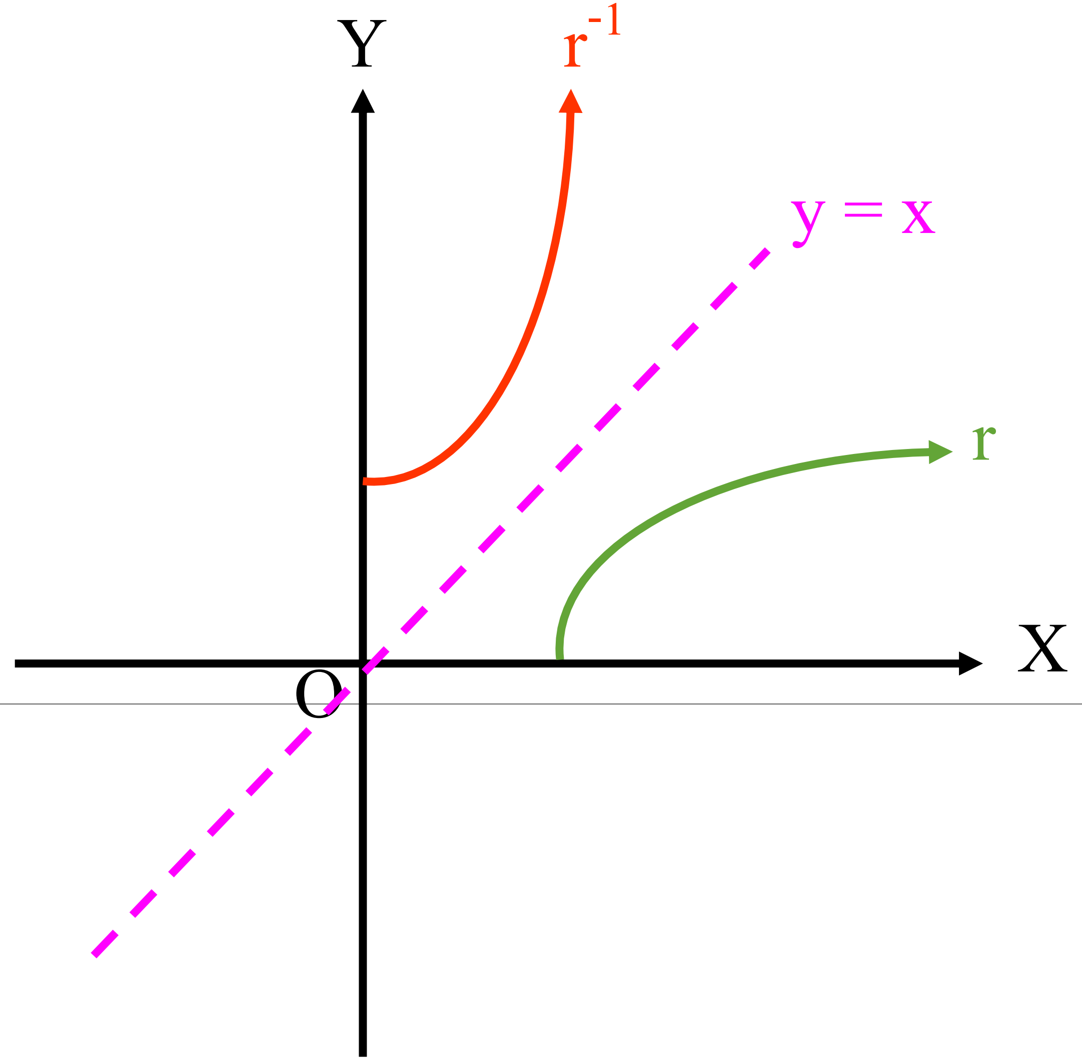
หรือ $r^{-1} = \{(x,y) / x^2 = y-3, x \geq 0\}$

$r^{-1} = \{(x,y) / y = x^2 + 3, x \geq 0\}$

ดังนั้น $D_{r^{-1}} = R_r = \{x / x \geq 0\}$

และ $R_{r^{-1}} = D_r = \{x / x \geq 3\}$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



2.3 ฟังก์ชัน (Function)

2.3.1 ความหมายของฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน

จากบทนิยามกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งสำหรับ x , y และ z ใด ๆ ถ้า $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

ดังนั้น ถ้ามี x , y และ z ซึ่ง $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แต่ $y \neq z$

จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1. {(1 , a), (1 , b), (2 , a), (3 , c)}
2. {(1 , b), (5 , b), (10 , b)}
3. {(4 , 10), (8 , -10), (12 , 10), (8 , 10)}

วิธีทำ

ข้อ 1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า (1 , a), (1 , b) มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

ข้อ 2 เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าไม่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

ข้อ 3 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า (8 , -10), (8 , 10) มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

$$1.\ \{(x,y)/y = x^2 - 5\}$$

$$2.\ \{(x,y)/x = y^2 + 1\}$$

$$3.\ \{(x,y)/y = |x|\}$$

วิธีทำ

1. ให้ (x , y), (x , z) $\in$ f จะได้ $y = x^2 - 5$ และ $z = x^2 - 5$

ดังนั้น $y = z$ เสมอ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

---

2. จาก $x = y^2 + 1$ ให้ $x = 5$ จะได้ $5 = y^2 + 1$

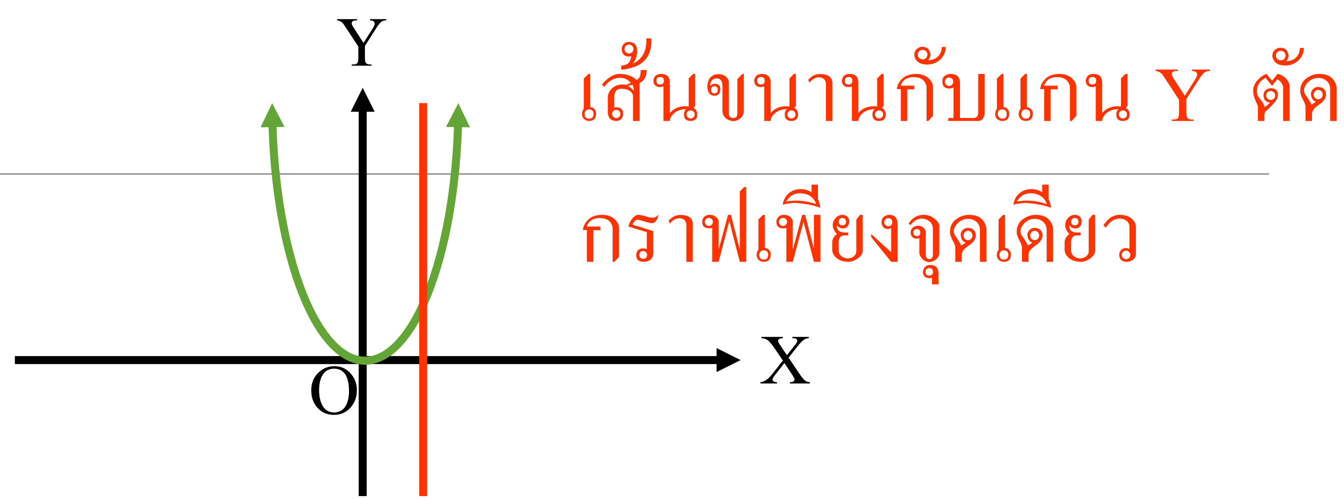
จะได้ $y^2 = 4$ ดังนั้น $y = -2 , 2$ แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. ให้ (x , y), (x , z) $\in$ f จะได้ $y = |x|$ และ $z = |x|$

ดังนั้น $y = z$ เสมอ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

การพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ที่เป็นกราฟว่าเป็นฟังก์ชัน หรือไม่ ให้ลากเส้นตรงขนานกับแกน Y ให้ผ่านกราฟ ถ้าเส้นตรงตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่เกิน 1 จุด จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์นั้น**เป็นฟังก์ชัน** แต่ถ้าเส้นตรงตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นจะ**ไม่เป็นฟังก์ชัน**

เช่น

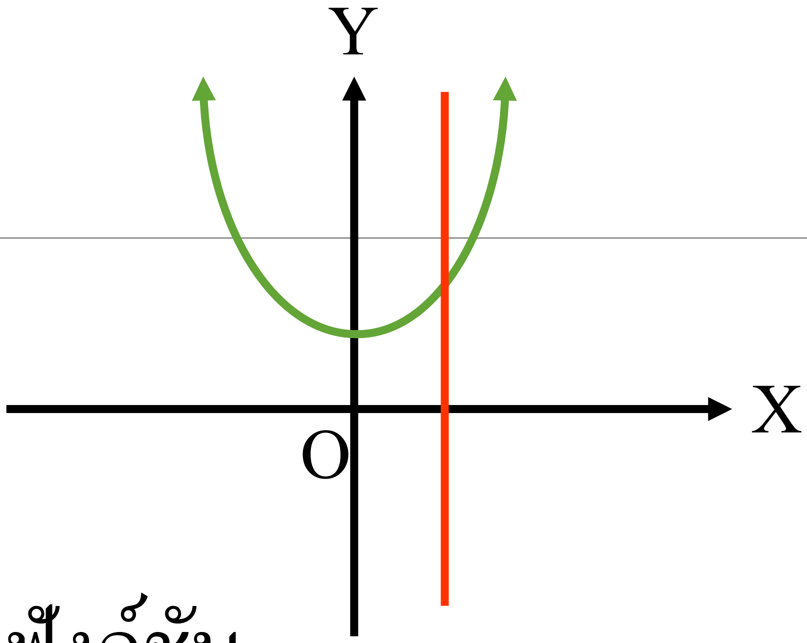


จากรูปข้างต้น จะได้ว่ากราฟของความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง จงพิจารณากราฟจากข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

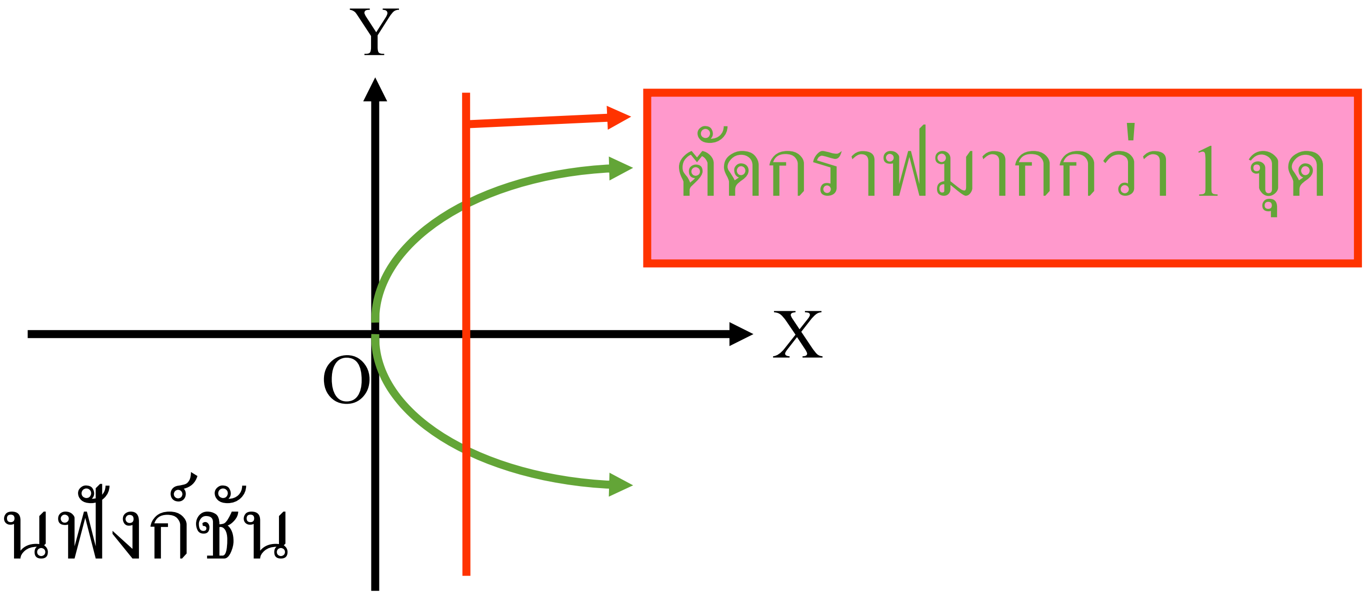
1. $r = \{(x, y) / y = x^2 + 1\}$
2. $r = \{(x, y) / y^2 = x\}$
3. $r = \{(x, y) / x = |y|\}$

วิธีทำ 1. $r = \{(x, y) / y = x^2 + 1\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



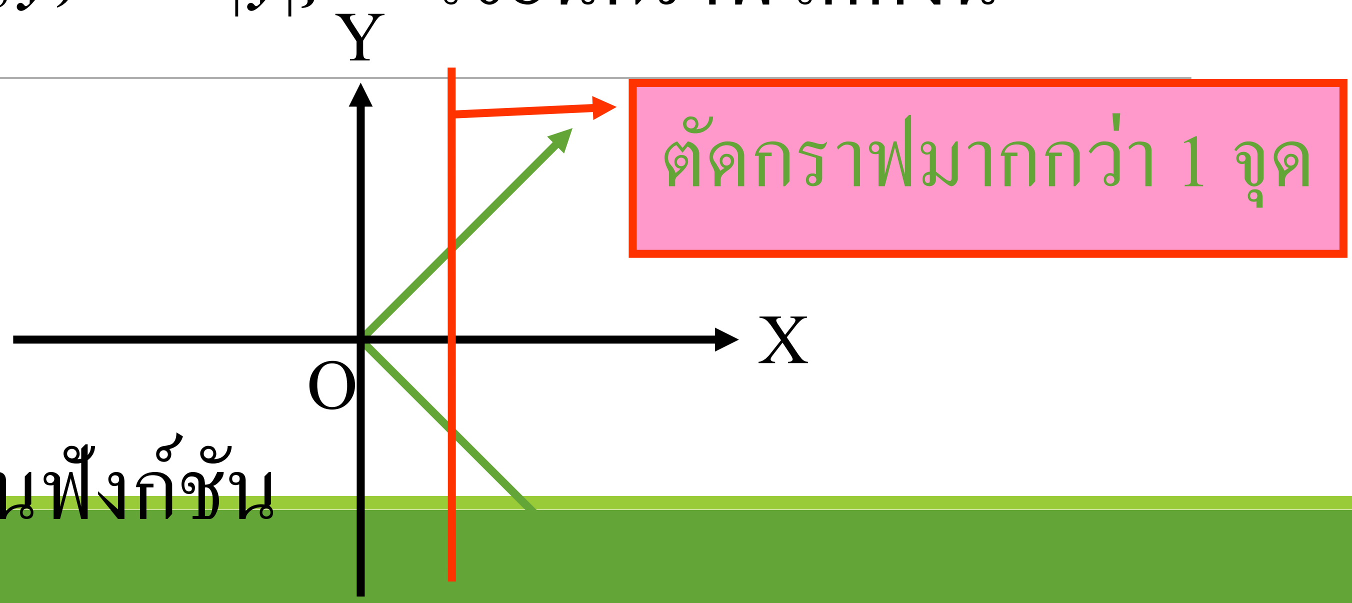
ดังนั้น r เป็นฟังก์ชัน

2. $r = \{(x,y) / y^2 = x\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. $r = \{(x,y) / x = |y|\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันจะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x , y) \in f$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น**ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x** อ่านว่า **เอฟของเอกซ์** หรือ **เอฟที่เอกซ์** หรือ **เอฟเอกซ์**

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$ เมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

โดยทั่วไปเมื่อกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจะหมายถึงฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R

ตัวอย่าง ให้ $A = \{10, 15, 20, 25\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ถ้า $f = \{(10,8), (15,4), (20,4), (25,8)\}$

จะได้ว่า $D_f = \{10, 15, 20, 25\} = A$ และ $R_f = \{4, 8\} \subset B$

ดังนั้น $f : A \longrightarrow B$

และถ้า $g = \{(2,10), (4,10), (6,15), (8,25)\}$

จะได้ว่า $D_g = \{2, 4, 6, 8\} = B$ และ $R_g = \{10, 15, 25\} \subset A$

ดังนั้น $g : B \longrightarrow A$

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ A และมีเรนจ์คือ B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ เมื่อ $D_f = A$ และ $R_f = B$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{10, 15, 20, 25\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ถ้า $f = \{(10,2), (15,4), (20,6), (25,8)\}$

จะได้ว่า $D_f = \{10, 15, 20, 25\} = A$ และ $R_f = \{2, 4, 6, 8\} \subset B$

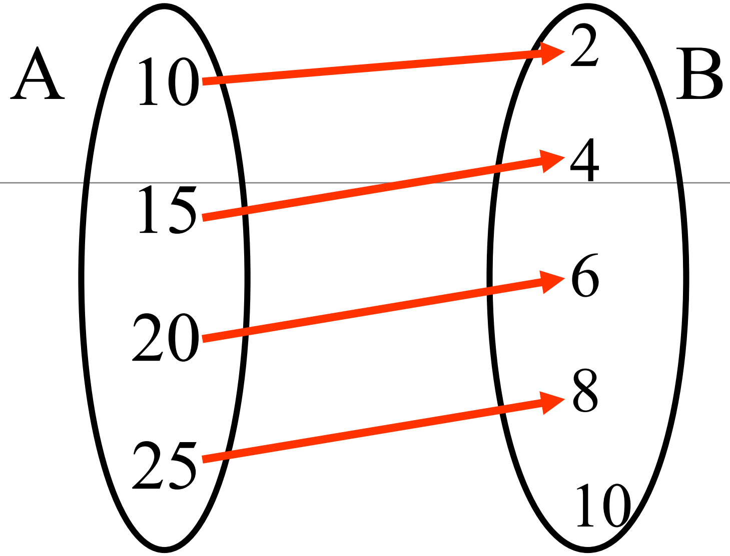
ดังนั้น $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ที่สำหรับ x_1, x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

ตัวอย่าง ให้ A = {10, 15, 20, 25} , B = {2, 4, 6, 8, 10}

ถ้า $f = \{(10,2), (15,4), (20,6), (25,8)\}$

จะได้ว่า



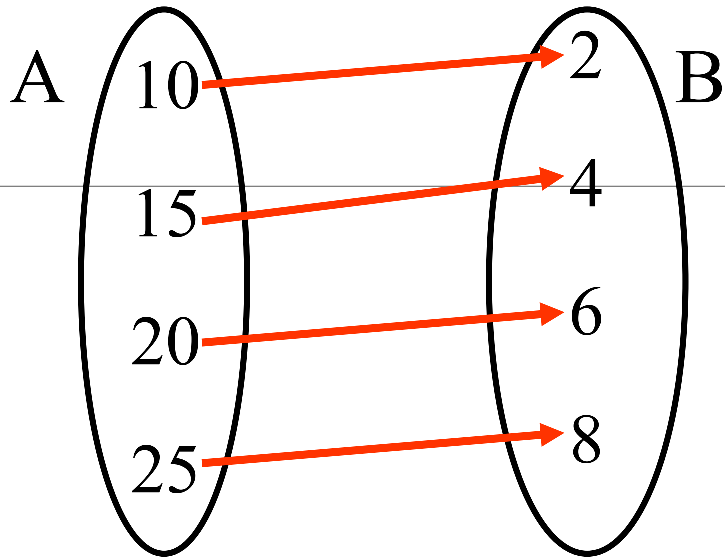
ดังนั้น $f : A \xrightarrow{1-1} B$

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ที่สำหรับ x_1 , x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$

ตัวอย่าง ให้ A = {10, 15, 20, 25} , B = {2, 4, 6, 8}

ถ้า f = {(10,2), (15,4), (20,6), (25,8)}

จะได้ว่า



ดังนั้น $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1. $f(x) = mx + b$ เมื่อ $m \neq 0$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

วิธีทำ 1. จาก $f(x) = mx + b$ เมื่อ $m \neq 0$

ให้ x_1 , x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $mx_1 + b = mx_2 + b$

$mx_1 = mx_2$ เนื่องจาก $m \neq 0$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

ให้ x_1 , x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $(x_1)^2 + 2x_1 + 1 = (x_2)^2 + 2x_2 + 1$

$(x_1)^2 - (x_2)^2 + 2x_1 - 2x_2 = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$

นั่นคือ $x_1 = x_2$ หรือ $x_2 = - x_1 - 2$

จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

เช่น $x_1 = -2$ จะได้ $x_2 = - (-2) – 2 = 0$ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

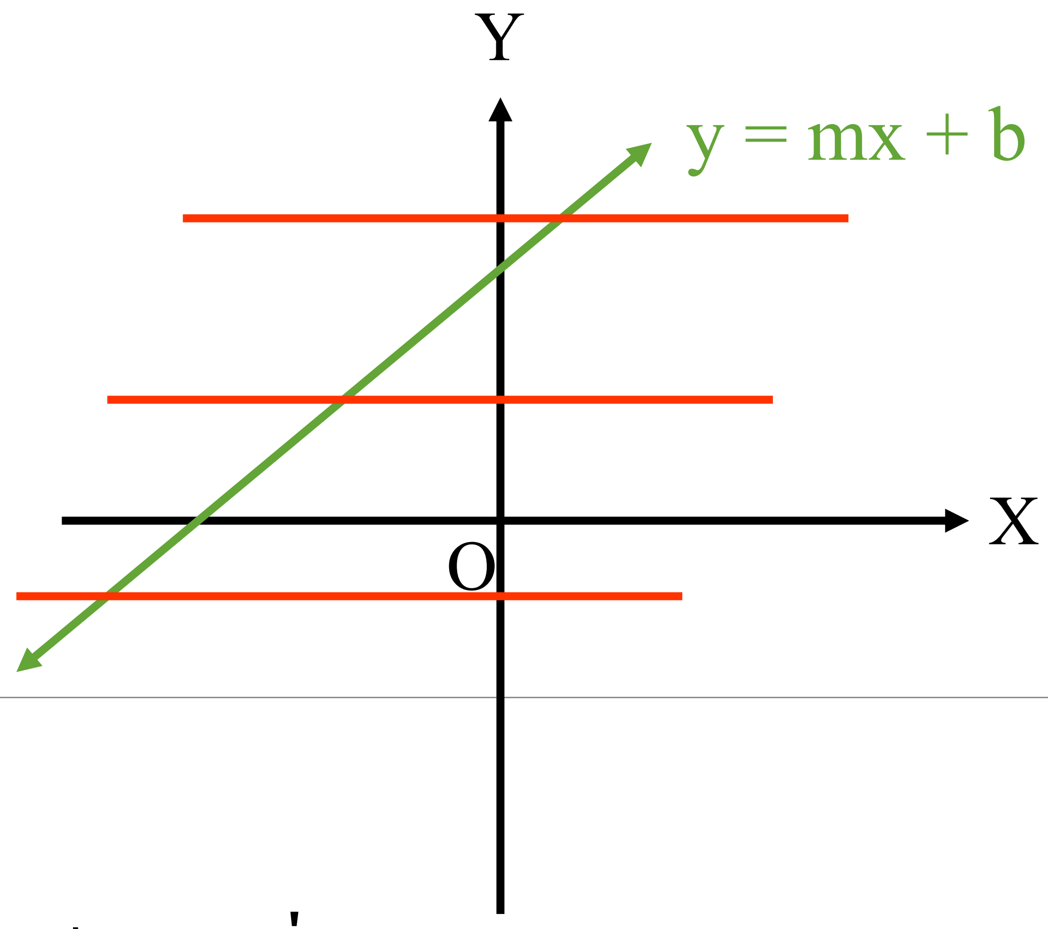
นั่นคือ f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากการตรวจสอบฟังก์ชันในตัวอย่างข้างต้น ฟังก์ชัน $f(x) = mx + b$ เมื่อ $m \neq 0$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชันทั้งสอง จะพบว่า

ถ้าลากเส้นตรงขนานกับแกน X ตัดกราฟ แล้วตัดกราฟเพียงจุดเดียว จะสรุปว่ากราฟนั้นเป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** แต่ถ้าตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุดกราฟนั้นจะ**ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**

เนื่องจาก $f(x_1) = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$

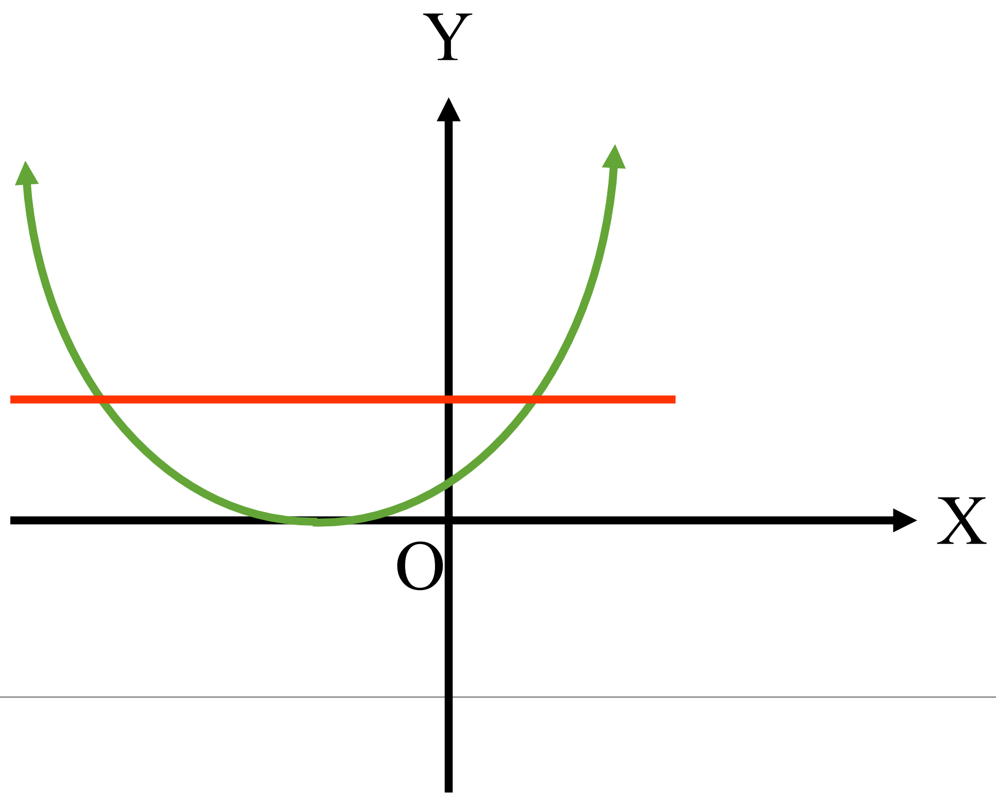
จาก $f(x) = mx + b$ เมื่อ $m \neq 0$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่าเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ตัดกราฟเพียงจุดเดียว

ดังนั้นกราฟนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จาก $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่าเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด

ดังนั้นกราฟนี้ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2.3.2 ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ ที่ควรรู้จัก

ฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function) และฟังก์ชันอดิสัย (Trancendental function)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันที่มีนิพจน์ประกอบด้วยค่าคงที่ ตัวแปร และเครื่องหมายบวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง หรือราก

1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a , b \in R$ เช่น $f(x) = 3x – 5$, $f(x) = 2 – 4x$

2. ฟังก์ชันคงตัว (Constant function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = b$ เมื่อ $b \in R$ เช่น $f(x) = 3$, $f(x) = 2$

3. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value function) คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ เช่น f(x) = /3x – 5/ , f(x) = – /x/ + 4

4. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step function) คือ ฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปคล้ายขั้นบันได

เช่น
$$f(x)=\begin{cases} \mathbf{0} & \textit{เมื่อ} \quad x<3 \\ \mathbf{5} & \textit{เมื่อ} \quad 3\leq x\leq 15 \\ \mathbf{8} & \textit{เมื่อ} \quad x>15 \end{cases}$$

5. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a,b,c \in R$ และ $a \neq 0$

เช่น $f(x) = 2x^2$, $f(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2 – 5x – x^2$

6. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in R$

เช่น $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$

7. ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (Periodic function) คือ f เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง p ซึ่ง $f(x + p) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x และ $x + p$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

เช่น $$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \; ; \; 0 < x < 1 \\ x - 1 \; ; \; 1 < x < 2 \end{cases}$$

ฟังก์ชันอดิสัย คือ ฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต

1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

เช่น $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^{2x}$

2. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

เช่น $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \log_3 5x$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตรีโกณมิติ เช่น $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2\cos 3x$

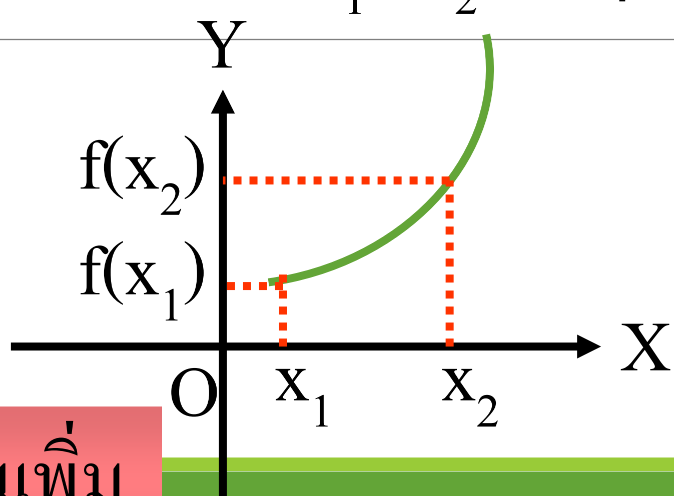
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน เช่น $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \arcsin x$

5. Hyperbolic function

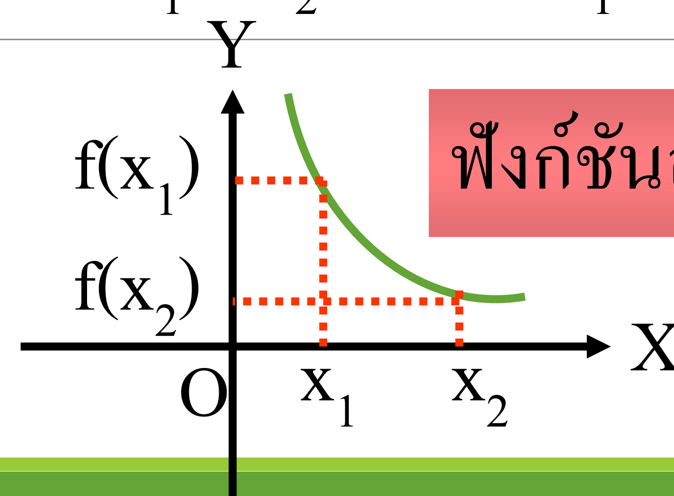
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 , x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 , x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



ฟังก์ชันเพิ่ม



ฟังก์ชันลด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซต R

1. $f(x) = 3x + 2$

2. $g(x) = -x^3 + 1$

วิธีทำ 1. จาก $f(x) = 3x + 2$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้ $3x_1 < 3x_2$

$$3x_1 + 2 < 3x_2 + 2$$

ดังนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

2. จาก $g(x) = -x^3 + 1$

ให้ x_1 , x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้ $(x_1)^3 < (x_2)^3$

$$-(x_1)^3 > -(x_2)^3$$

$$-(x_1)^3 + 1 > -(x_2)^3 + 1$$

ดังนั้น $g(x_1) > g(x_2)$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชันลด

2.3.3 การดำเนินการของฝ่ายจัด

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R ผลบวก (sum) ผลต่าง (difference) ผลคูณ (product) และผลหาร (quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย f + g, f – g, fg และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าโดย

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

ซึ่ง $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$ และ $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) = 0\}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(2,5),(4,10),(6,12),(8,20)\}$

และ $g = \{(2,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}$ จงหา $f+g, f-g, fg, \dfrac{f}{g}$

วิธีทำ จากโจทย์ $D_f = \{2, 4, 6, 8\}$ และ $D_g = \{2, 4, 5, 6\}$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{f/g} = D_f \cap D_g = \{2, 4, 6\}$

นั่นคือ $f + g = \{(2,6),(4,12),(6,16)\}$

$f - g = \{(2,4),(4,8),(6,8)\}$

$fg = \{(2,5),(4,20),(6,48)\}$

$\dfrac{f}{g} = \{(2,5),(4,5),(6,3)\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ จงหา $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$

วิธีทำ จากโจทย์ $D_f = D_g = R$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = R$

และ $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) = 0\} = R - \{0\}$

$f + g = \{(x , y) / \ y = x + 2 + x^2\}$

$f - g = \{(x , y) / \ y = x + 2 - x^2\}$

$fg = \{(x , y) / \ y = (x + 2)x^2\}$

$$\frac{f}{g} = \left\{ (x, y) / \ y = \frac{x+2}{x^2}, x \neq 0 \right\}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ จงหา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ $D_f = D_g = R$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = R$

และ $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) = 0\} = R - \{-1 , 1\}$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 2$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x + 1)(x^2 - 1) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{x^2-1}, x^2 - 1 \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา

$(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ $D_f = R$ และ $D_g = [0, \infty)$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = [0, \infty)$

และ $D_{f/g} = [0, \infty) - \{0\} = (0, \infty)$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - \sqrt{x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$$

ตัวอย่างที่ 5 จากตัวอย่างที่ 4 จงหา $(f+g)(1)$, $(f-g)(-2)$, $(fg)(2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$

วิธีทำ จาก $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x}$

จะได้ $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = (1^3 + 1) + 1 = 3$

จาก $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - \sqrt{x}$

จะได้ $(f-g)(-2)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $-2 \notin [0, \infty)$

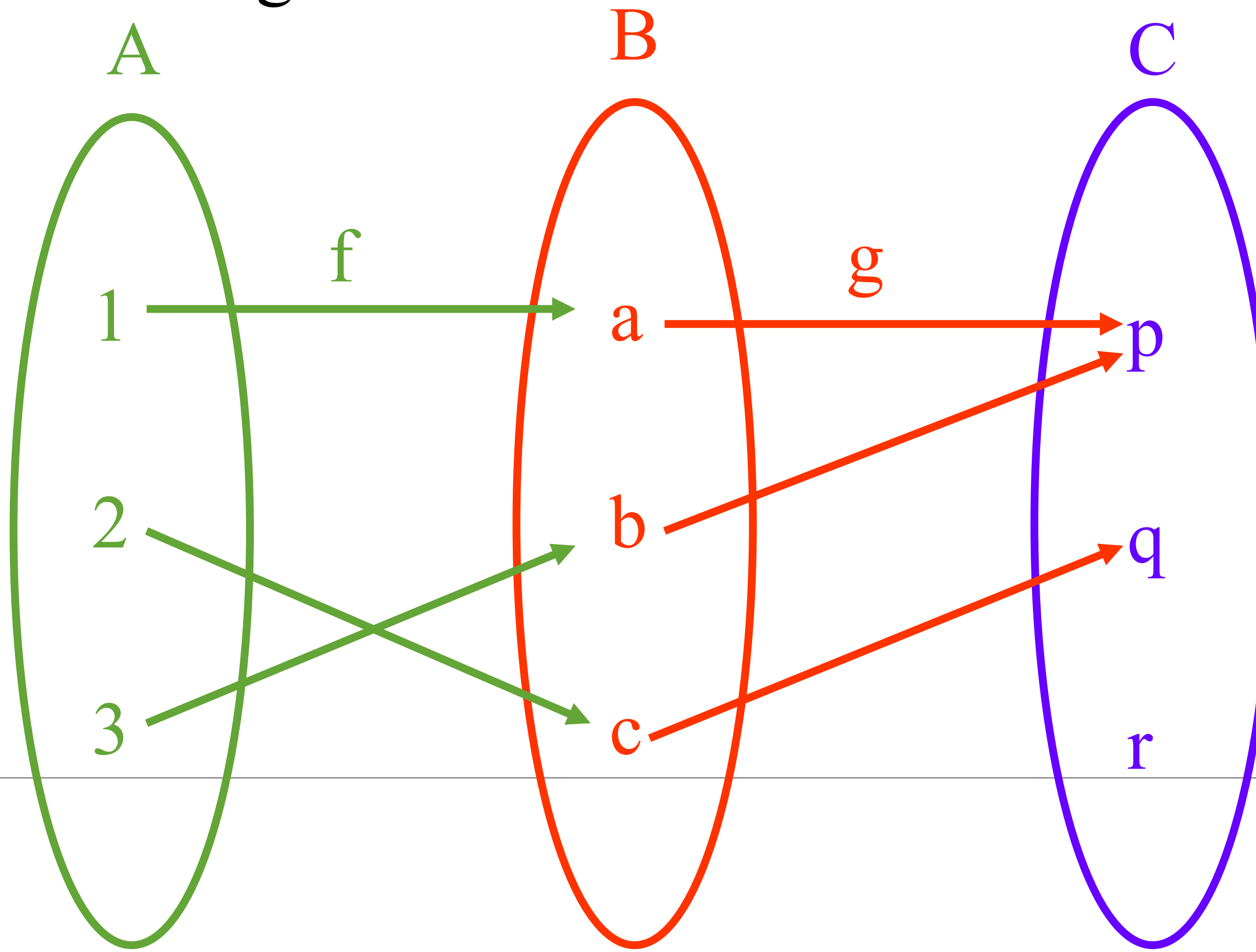
จาก $(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$

จะได้ $(fg)(2) = f(2)g(2) = (2^3 + 1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

จาก $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$ จะได้ $\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{4^3+1}{\sqrt{4}} = \frac{65}{2}$

2.3.4 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแผนภาพ

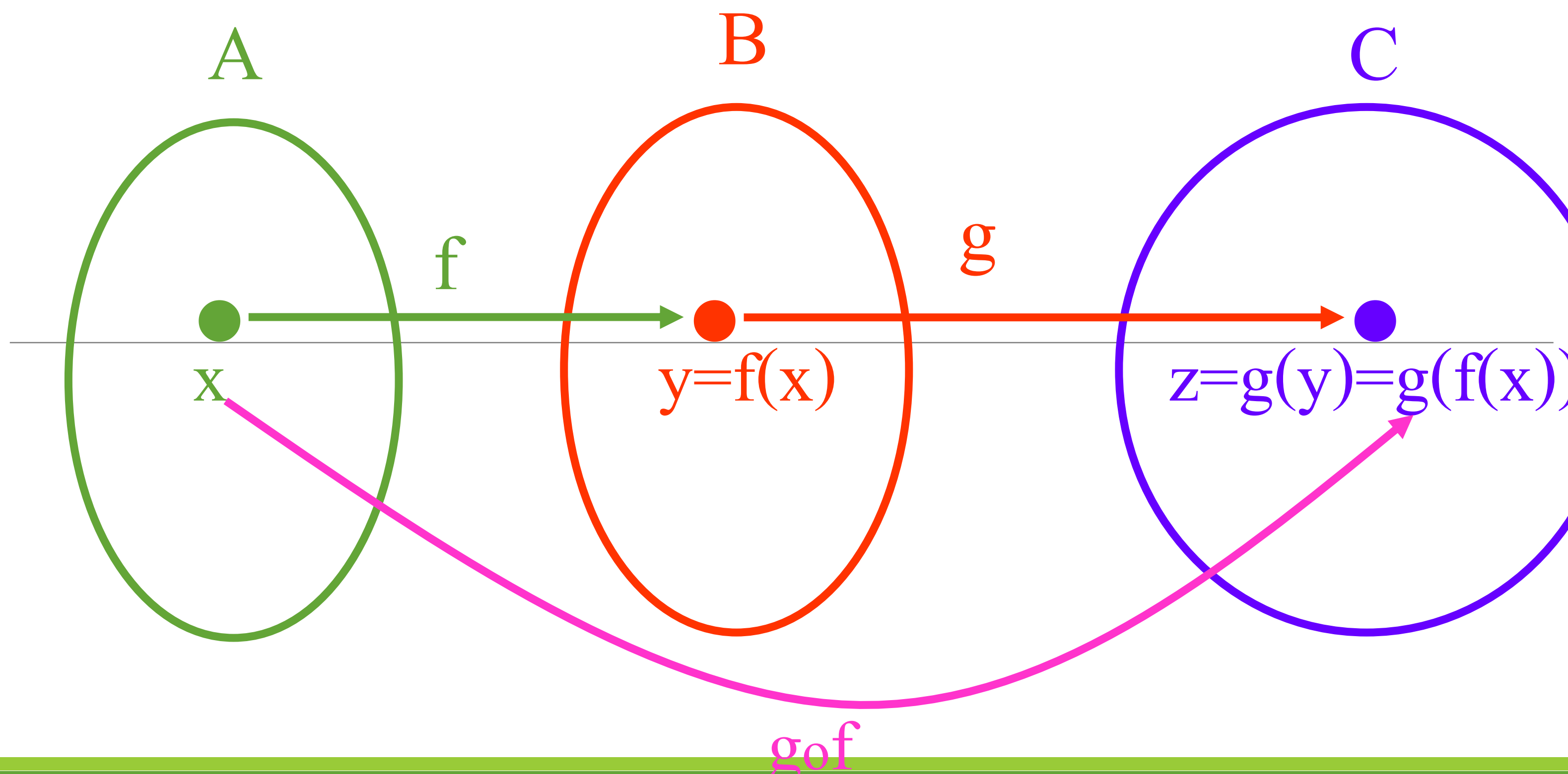


จากแผนภาพจะได้ f(1)=a, f(2)=c, f(3)=b, g(a)=p, g(b)=p, g(c)=q

ดังนั้น $g(f(1)) = p$, $g(f(2)) = q$, $g(f(3)) = p$

จะเห็นว่าฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต C เขียนแทนฟังก์ชันนี้ว่า gof (อ่านว่า จีโอเอฟ) และเรียกว่า**ฟังก์ชันประกอบของ f และ g**

จาก $(g\circ f)(1)=g(f(1))=p$, $(g\circ f)(2)=g(f(2))=q$, $(g\circ f)(3)=g(f(3))=p$



บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย gof คือฟังก์ชันที่มีโดเมนคือ $D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$ และกำหนดค่าโดย

$gof\,(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน D_{gof}

ตัวอย่างที่ 1 ให้ f = {(1,3),(2,4),(3,5)} และ g = {(3,2),(4,3),(5,5)}

จงหา gof และ fog

ข้อสังเกต $fog \neq gof$

วิธีทำ จะหา gof ต้องหา $R_f \cap D_g = \{3,4,5\} \cap \{3,4,5\} \neq \varnothing$

ดังนั้นมีฟังก์ชัน gof ซึ่ง gof = {(1,2),(2,3),(3,5)}

จะหา fog ต้องหา $R_g \cap D_f = \{2,3,5\} \cap \{1,2,3\} \neq \varnothing$

ดังนั้นมีฟังก์ชัน fog ซึ่ง fog = {(3,4),(4,5)}

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $g(x) = 2x - 3$ และ $h(x) = x + 1$

จงหา $h(g(2))$ และ $g(h(2))$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $D_g = R$, $R_g = R$

และ $D_h = R$, $R_h = R$

ดังนั้น $R_g \cap D_h \neq \varnothing$ และ $R_h \cap D_g \neq \varnothing$

นั่นคือ

$$h(g(2)) = h(4 - 3) = h(1) = 1 + 1 = 2$$

$$g(h(2)) = g(2 + 1) = g(3) = 6 - 3 = 3$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $f(x) = -2x$ และ $g(x) = x^2$

จงหา $g(f(x))$ และ $f(g(x))$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $D_f = R$, $R_f = R$

และ $D_g = R$, $R_g = [0 , \infty)$

ดังนั้น $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ และ $R_g \cap D_f \neq \varnothing$

นั่นคือ

$$g(f(x)) = g(-2x) = (-2x)^2 = 4x^2$$

$D_{gof} = R$ และ $R_{gof} = [0 , \infty)$

$$f(g(x)) = f(x^2) = -2x^2$$

$D_{fog} = R$ และ $R_{fog} = (-\infty , 0]$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

จงหา $g(f(x))$ และ $f(g(x))$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $D_f = R$, $R_f = R$

และ $D_g = [0 , \infty)$, $R_g = [0 , \infty)$

ดังนั้น $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ และ $R_g \cap D_f \neq \varnothing$

นั่นคือ

$$g(f(x)) = g(x + 1) = \sqrt{x+1}$$

$D_{gof} = [-1 , \infty)$ และ $R_{gof} = [0 , \infty)$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

$D_{fog} = [0 , \infty)$ และ $R_{fog} = [1 , \infty)$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $g(x) = 2x + 1$ และ $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$

จงหา $f(x)$ ซึ่ง $f(g(x)) = h(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(g(x)) = h(x)$

$$f(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 7$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 + 6$$

$$= (2x + 1)^2 + 6$$

$$\therefore \quad f(x) = x^2 + 6$$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $f(x) = 3x + 5$ และ $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$

จงหา $g(x)$ ซึ่ง $f(g(x)) = h(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = 3x + 5$

จะได้ $f(g(x)) = 3g(x) + 5$ ....(1)

และ $f(g(x)) = h(x)$ ....(2)

---

(1) = (2) จะได้ $3g(x) + 5 = 3x^2 + 3x + 2$

$$3g(x) = 3x^2 + 3x - 3$$

$$\therefore \quad g(x) = x^2 + x - 1$$

2.5 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function)

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f = \{(x , y) / y = 2x + 1\}$ จงหา f^{-1}

วิธีทำ จาก $f = \{(x , y) / y = 2x + 1\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(y , x) / y = 2x + 1\}$

หรือ $f^{-1} = \{(x , y) / x = 2y + 1\}$

หรือ $$f^{-1} = \left\{ (x, y) / y = \frac{x-1}{2} \right\}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = x^3$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3$ จะได้ $y = x^3$

ดังนั้น $x = y^3$ นั่นคือ $y = \sqrt[3]{x}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $f(x) = x^2$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2$ จะได้ $y = x^2$

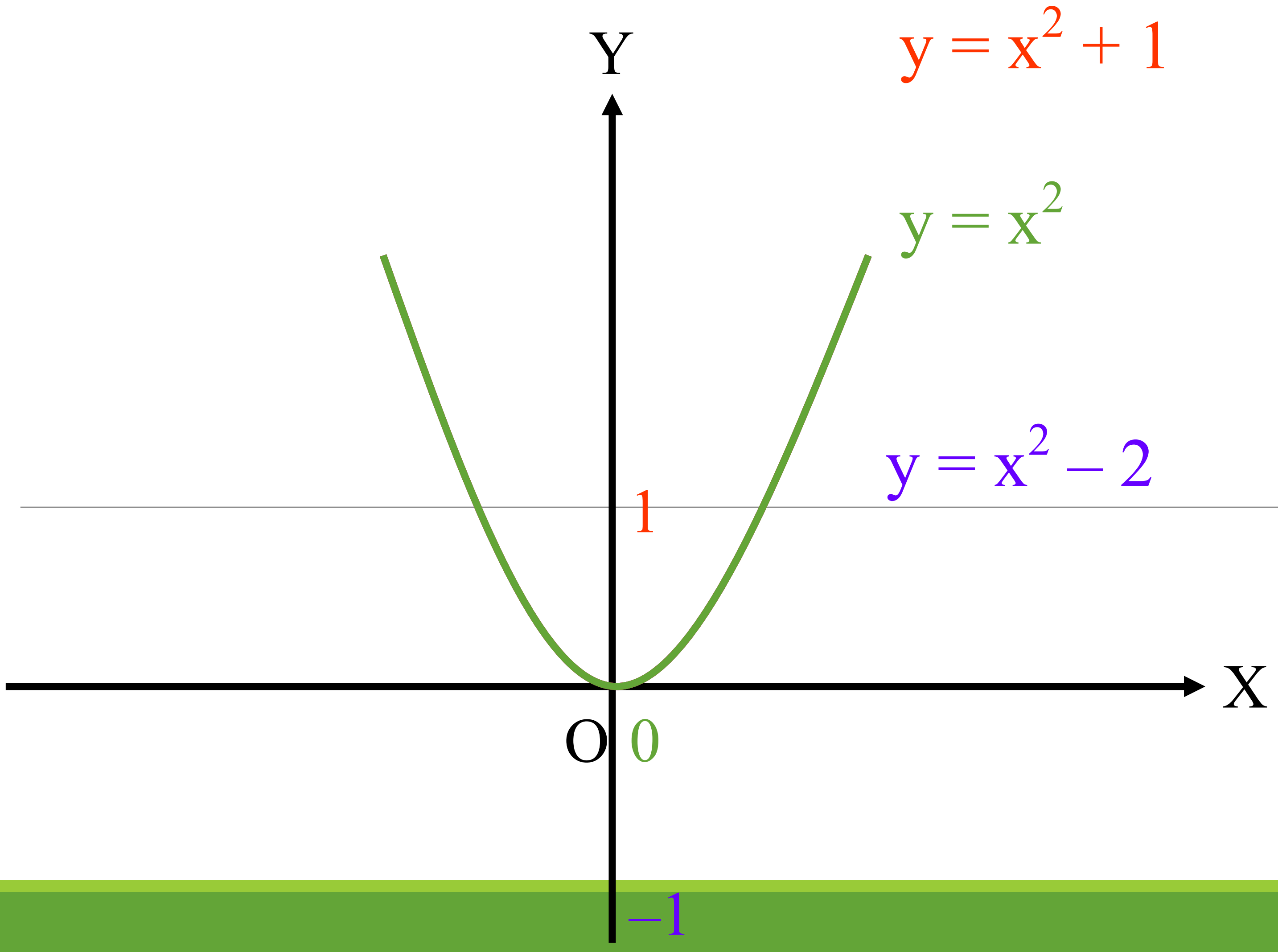
ดังนั้น $x = y^2$ นั่นคือ $y = \pm\sqrt{x}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน

การหากราฟของฟังก์ชันผกผันใช้วิธีเดียวกับการหาความสัมพันธ์ผกผัน

2.3.6 เทคนิคการเขียนกราฟ

การเลื่อนกราฟในแนวตั้ง



การเลื่อนกราฟในแนวตั้ง

การเลื่อนกราฟในแนวตั้ง จะทำให้สมการของกราฟเกิดการเปลี่ยนแปลง ดังนี้

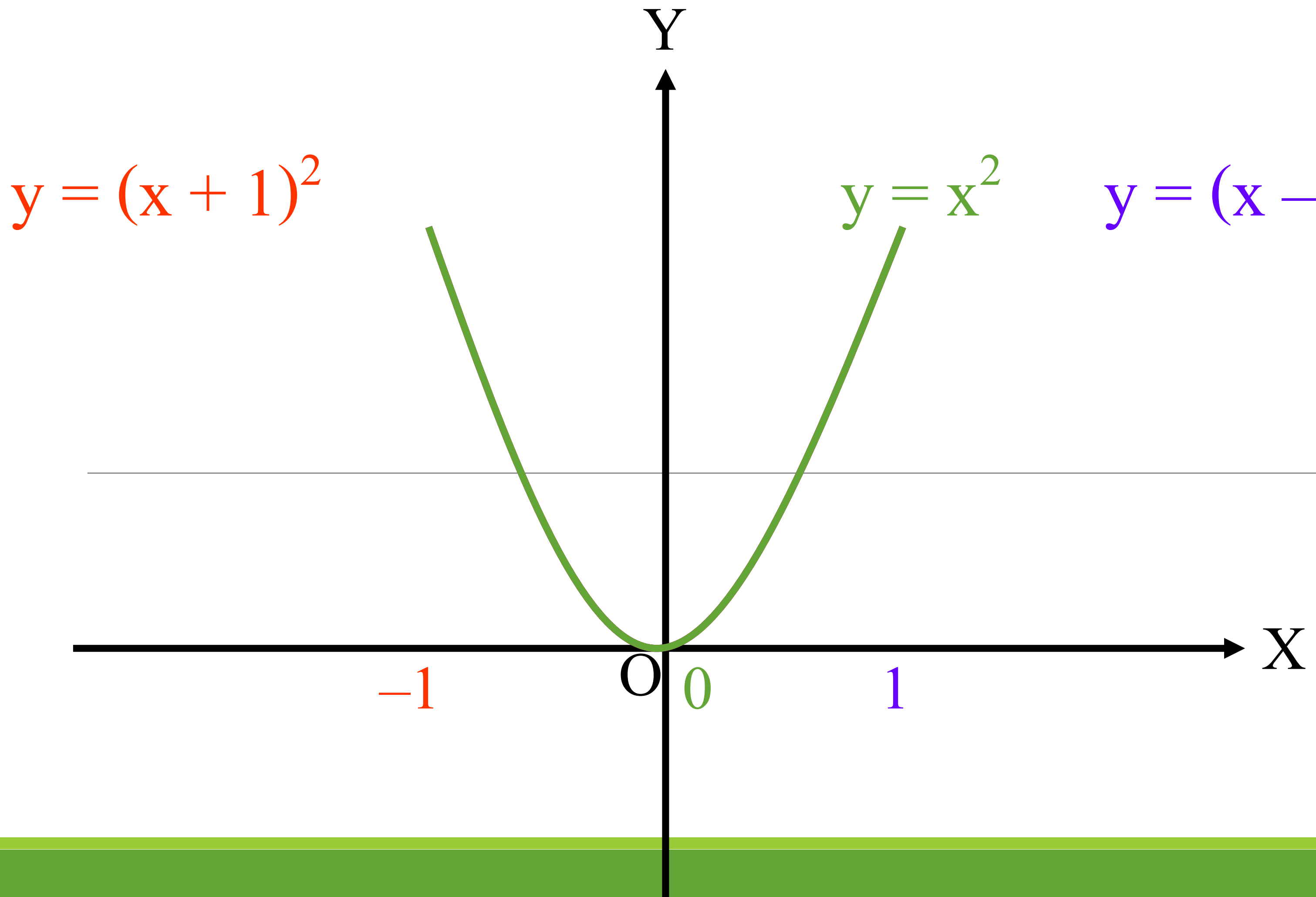
1. จากกราฟของ $y = f(x)$ ถ้าเลื่อนกราฟขึ้นข้างบน c หน่วย

จะได้สมการของกราฟเป็น $y = f(x) + c$ เมื่อ $c > 0$

2. จากกราฟของ $y = f(x)$ ถ้าเลื่อนกราฟลงข้างล่าง c หน่วย

จะได้สมการของกราฟเป็น $y = f(x) - c$ เมื่อ $c > 0$

การเลื่อนกราฟในแนวนอน



การเลื่อนกราฟในแนวนอน

การเลื่อนกราฟในแนวนอน จะทำให้สมการของกราฟเกิดการเปลี่ยนแปลง ดังนี้

1. จากกราฟของ $y = f(x)$ ถ้าเลื่อนกราฟไปทางขวา c หน่วย

จะได้สมการของกราฟเป็น $y = f(x - c)$ เมื่อ $c > 0$

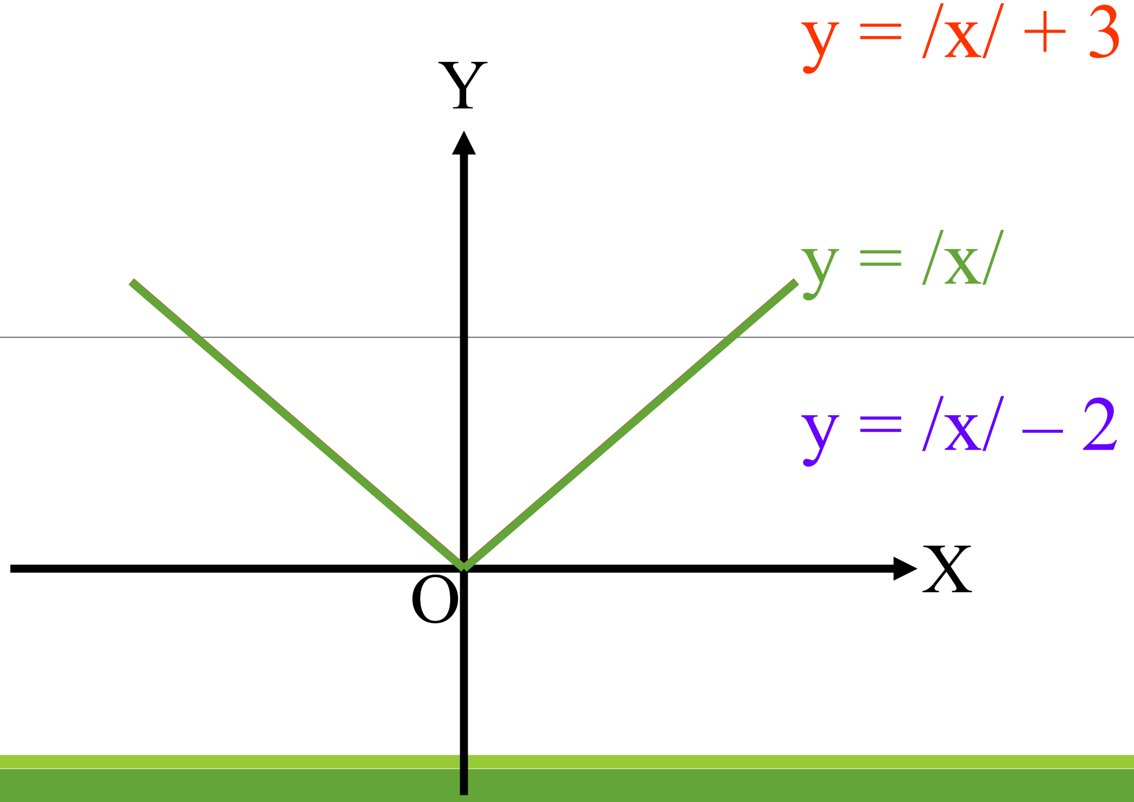
2. จากกราฟของ $y = f(x)$ ถ้าเลื่อนกราฟไปทางซ้าย c หน่วย

จะได้สมการของกราฟเป็น $y = f(x + c)$ เมื่อ $c > 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟต่อไปนี้

1. $y = /x/ + 3$
2. $y = /x/ - 2$

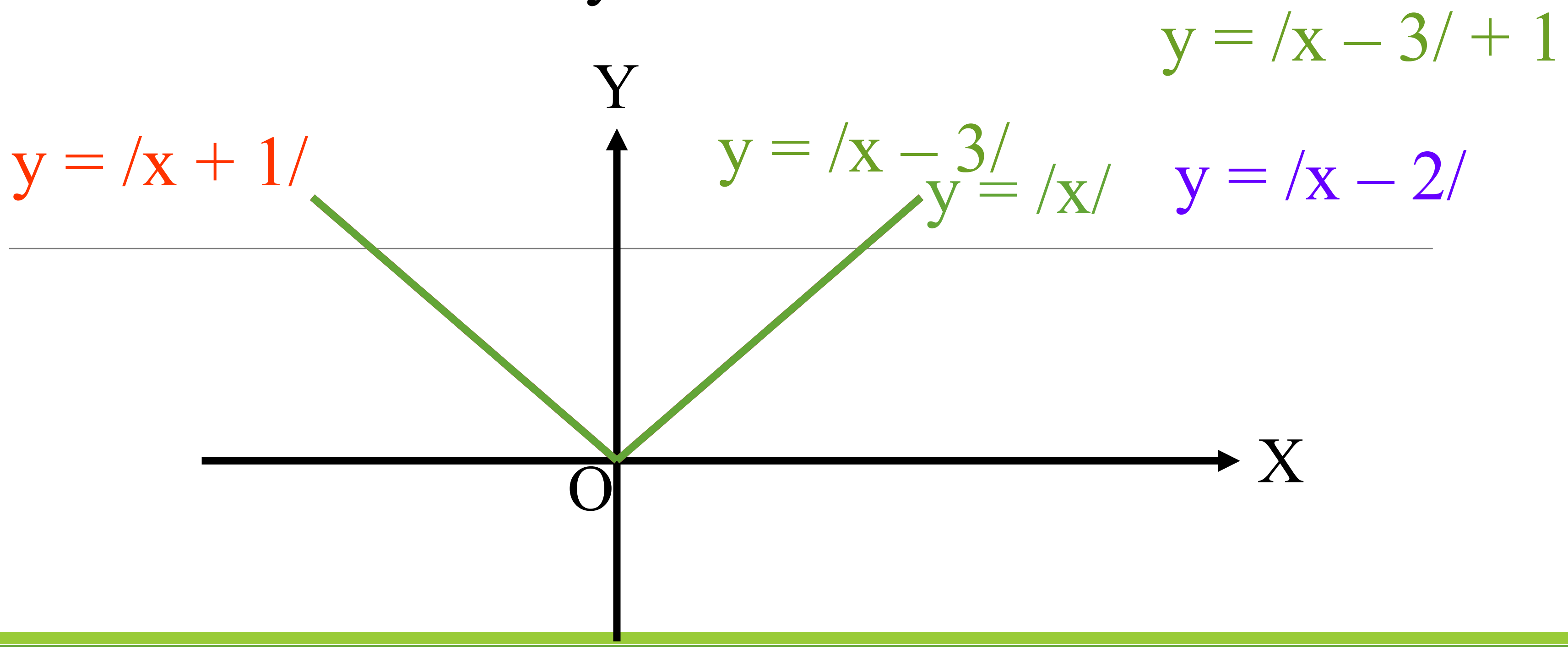
วิธีทำ พิจารณากราฟของ $y = /x/$



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟต่อไปนี้

1. $y = /x + 1/$
2. $y = /x - 2/$
3. $y = /x - 3/ + 1$

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $y = /x/$



พบกันในเรื่องต่อไป

ใบงานที่ 1

ชื่อ–นามสกุล..ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/... เลขที่ ....

ให้นักเรียนทำโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงหาค่า x และ y เมื่อ

   1.1 $(22, x) = (y, 6)$ ....

   1.2 $(2x, 6y) = (4, x+4)$ ....

   1.3 $(3x-y, 5) = (5, x+3y)$ ....

2. กำหนด $A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,2,5\}$ จงหา

   2.1 $A \times B$ ....

   2.2 $A \times (B \cap C)$ ....

   2.3 $(A \times B) \cup (B \times B)$ ....

   2.4 $(A \times B) \cap (A \times C)$ ....

3. กำหนดให้ A , B , C , $A \cap B$ และ $B \cap C$ มีสมาชิกเท่ากับ 4 , 7 ,8 ,2 และ 3 ตัวตามลำดับ จงหาจำนวนสมาชิกของ

   3.1 $A \times B$ ....

   3.2 $C \times A$ ....

   3.3 $(A \cap B) \times (B \cup C)$ ....

ใบงานที่ 2

ชื่อ–นามสกุล..ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/...   เลขที่ ....

1. กำหนด $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{2,8,9\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 r_1 แทนความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" จาก A ไป B

   ....

   1.2 r_2 แทนความสัมพันธ์ "สองเท่า" จาก B ไป A

   ....

   1.3 r_3 แทนความสัมพันธ์ "$x + y \leq 10$" ใน B

   ....

2. จงเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก

   2.1 ให้ $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ และ $r = \{(x,y)\ \ A \times B \mid x > y\}$

   ....

   2.2 $r = \{(x,y)\ \ I \times N \mid y = \frac{x}{3}\}$

   ....

3. จงคำนวณหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

3.1 $[(x,y)|y = x-2]$ ....

3.2 $[(x,y)|y = \sqrt{2}]$ ....

3.3 $[(x,y)|y = x^2+1]$ ....

4. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $r = \{(x,y)\ R \times R\ |y = 2x-1\}$

4.2 $r = \{(x,y)\ A \times A\ |y = x+1\}$ เมื่อ $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

ใบงานที่ 3

ชื่อ –นามสกุล...ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/...   เลขที่ ....

1. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

   1.1 {(2,3) , (4,6) , (6,2)} ....

   1.2 {(2,3) , (2,4) , (2,5)} ....

   1.3 {(1,2) , (6,4) , (1,3)} ....

   1.4 {(3,2) , (4,2) , (7,2)} ....

2. กำหนดกราฟของความสัมพันธ์ดังนี้ กราฟใดเป็นฟังก์ชัน

   2.1 2.2 2.3 2.4

3. กำหนด $f(x) = 2x - 4$ และ $g(x) = x^2 - 3$ จงหาค่าของ

   3.1 $f(2)$

   ....

   3.2 $f(g(1))$

   ....

ใบงานที่ 4

ชื่อ –นามสกุล..ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/... เลขที่ ....

1. จงหาจุดวกกลับของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $y = x^2 - 4x + 3$ ....

   1.2 $y = x^2 + 4x - 5$ ....

2. จงหาจุดที่กราฟตัดแกน x ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $y = -6x^2 + 6x - 5$ ....

   2.2 $y = x^2 + 8x + 14$ ....

3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 24$ และ $g(x) = 2x - 1$ จงหา

   3.1 $(gof)(3)$ ....

   3.2 $(gog)(5)$ ....

   3.3 $(fog)(-2)$ ....

   3.4 $(fof)(-3)$ ....

   3.5 $(gof)(x)$ ....

   3.6 $(fog)(x)$ ....

ใบงานที่ 5

ชื่อ –นามสกุล...ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/...   เลขที่ ....

1. กำหนดให้ $f = \{(1,2), (3,5), (4,7), (6,3)\}$

   $g = \{(1,5), (2,8), (3,1), (6,0)\}$ จงหา

   1.1 $f + g$ ....

   1.2 $f - g$ ....

   1.3 $f \cdot g$ ....

   1.4 $\frac{f}{g}$ ....

2. กำหนด $f(x) = 2x - 5$ จงหา

   2.1 $f^{-1}(1)$ ....

   2.2 $f^{-1}(-1)$ ....

3. 3. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่

   3.1 $f(x) = 2x$ ....

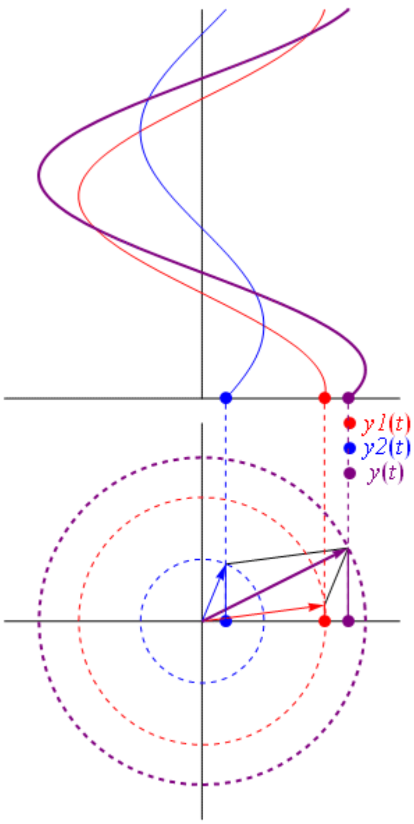
   3.2 $f(x) = 4x - 1$ ....

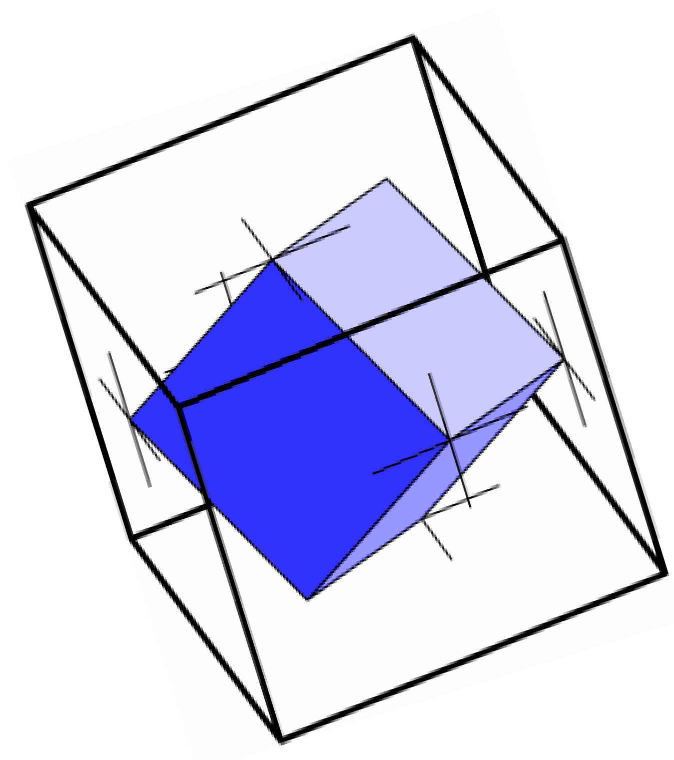
   3.3 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ....

   3.4 $f(x) = 1\ x\ 1$ ....

เอกสารประกอบการเรียนรู้

เพื่อทบทวนบทเรียนภาคฤดูร้อน





วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เอกสารประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

หน่วยที่ 2 ฟังก์ชัน

จุดประสงค์บทเรียนออนไลน์

เพื่อให้นักเรียนทำความรู้จักกับฟังก์ชันพีชคณิต 4 ฟังก์ชัน คือฟังก์ชันเชิงเส้น, ฟังก์ชันกำลังสอ}, ฟังก์ชันขั้นบันไดและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เป็นการเตรียมความพร้อมก่อนเรียนทักษะการคิดคำนวณในช่วงเปิดภาคเรียนที่ 1 ซึ่งครูผู้สอนต้องสอนและให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดพร้อมกันในชั้นเรียน

กิจกรรม

1. อ่านหนังสือคณิตศาสตร์พื้นฐาน บทที่ 2เรื่องฟังก์ชัน หน้าที่ 41 – 104 คำแนะนำให้นักเรียนอ่านทำความเข้าใจความหมายบทนิบาม รูปแบบของสมการพยายามทำดูตัวอย่างจากหลายๆ แหล่ง ทั้งหนังสือเรียนและสืบค้นข้อมูลมางอินเตอร์เน็ตทีละหัวข้อ นักเรียนยังไม่ต้องสนใจเรื่องการคิดคำนวณหรือการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชัน ในส่วนนี้เราจะมาเรียนรู้พร้อมกันในห้องเรียน
2. จัดทำโปสเตอร์เพื่อสรุปบทเรียนเป็น 5 แผ่น(นิยาม,รูปแบบสมการของฟังก์ชันและกราฟ)
   - ฟังก์ชัน
   - ฟังก์ชันเชิงเส้น
   - ฟังก์ชันกำลังสอง
   - ฟังก์ชันขั้นบันได
   - ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

   ซึ่งตัวอย่างที่แนบไปให้จะเป็นPostersเรื่องที่ ไม่เกี่ยวกับชิ้นงานที่สั่งให้ทำ ชิ้นงานตัวอย่างเป็นเพียงผลงานที่เป็นIdeas ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษาที่ผ่านมา ถึงแม้จะเป็นเรื่องเดียวกันแต่นักเรียนต้องสร้างธีมขอลชุดงานของตนเอง สรุปเนื้อหาและสร้างตัวอย่างที่ไม่เหมือนกัน

3. เมื่อเปิดเทอมจะรวบรวมชุดโปสเตอร์ของแต่ละคน นำเสนอโปสเตอร์ หน้าชั้นเรียน ดังตัวอย่าง VDO Presentationของห้อง ม.5/5 และวิจารณ์ผลงานของเพื่อนในห้องเพื่อจัดกลุ่มการให้คะแนน ตามเกณฑ์ที่นักเรียนในแต่ละห้องสร้างขึ้น
4. โพลส์ผลงานลงใน Google classroom หรือ Google Site

สิ่งที่แนบมา

1. คำชี้แจงหน่วยที่ 2 ฟังก์ชั่น
2. ไฟล์ตัวอย่างการทำโปสเตอร์

ครูผู้สอน   มิสชลธิชา บุญเลี้ยง